Problème N°4

La partie 1 comporte quatre questions indépendantes, dont les résultats sont utilisés dans certaines questions des parties 2, 3 et 4.

Les candidats n'ayant pas réussi à traiter l'une ou l'autre des questions de la partie 1 pourront néanmoins faire appel aux résultats qui y sont clairement énoncés.

PARTIE 1

1.1. Soit n un entier naturel et x et t deux réels. On définit :

$$\Phi = \frac{1}{2} + \cos(x - t) + \cos 2(x - t) + \ldots + \cos n(x - t)$$

Montrer que:

$$\Phi = \frac{\sin \left[(2n+1) \cdot \left(\frac{x-t}{2} \right) \right]}{2 \sin \frac{x-t}{2}} \quad \text{si} : x-t \neq 0 \ [2\pi]$$

1.2. a et b sont deux réels tels que a < b; soit f une fonction de classe C^1 sur [a, b].

Pour tout λ réel, on note $I_{\lambda} = \int_{a}^{b} f(t) \sin \lambda t \, dt$ et $J_{\lambda} = \int_{a}^{b} f(t) \cos \lambda t \, dt$. En effectuant une intégration par parties, prouver que I_{λ} et J_{λ} ont pour limite 0 quand λ tend vers $+\infty$.

1.3. Soit f une application de $\mathbb R$ dans $\mathbb R$, de classe C^2 et 2π - périodique.

Soit x un réel donné; on note par h la fonction définie sur $\mathbb R$ par :

$$(\forall t \in \mathbb{R}) (t \neq x [2 \pi]) : \qquad h(t) = \frac{f(t) - f(x)}{2 \sin\left(\frac{t - x}{2}\right)}$$

$$\forall k \in \mathbb{Z} \qquad \qquad h(x + 2k\pi) = (-1)^k f'(x).$$

Démontrer que h est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb R$.

1.4. a et b étant deux réels (a < b), on note I = [a, b].

Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I et $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que la série $\sum \alpha_n$ soit convergente et que :

$$\forall x \in I \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |v_n(x)| \leq \alpha_n.$$

a. Honter que la fonction $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x)$ est une fonction continue sur I.

b. Démontrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \left| \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x) \right) dx - \sum_{p=0}^n \int_a^b v_p(x) dx \right| \leq (b-a) \sum_{p=n+1}^{+\infty} \alpha_p.$$

c. En déduire que :

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x)\right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b v_n(x) dx.$$

PARTIE 2

2.1. Soit f la fonction réelle de la variable réelle définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = |\sin^3 x|.$$

Étudier les variations de f. Tracer sa courbe représentative.

Démontrer que f est une fonction de classe \mathbb{C}^2 sur \mathbb{R} , mais pas de classe \mathbb{C}^3 .

2.2. Démontrer qu'il existe un couple de réels (A, B) tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin^3 x = A \cdot \sin x + B \cdot \sin 3x.$$

2.3. Pour tout entier naturel n, on pose:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin^3 t| \cdot \cos(nt) dt$$
 $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin^3 t| \cdot \sin(nt) dt$.

- a. Calculer b_n .
- b. Calculer a_{2n+1} .
- c. Exprimer a_{2n} en fonction de n.

PARTIE 3

Soit f une fonction définie sur $\mathbb R$ à valeurs réelles, 2π -périodique et de classe $\mathbb C^2$.

On note:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \cos(nt) \, dt$$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \sin(nt) \, dt$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad u_0(x) = \frac{a_0(f)}{2}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) (\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad u_n(x) = a_n(f) \cdot \cos(nx) + b_n(f) \cdot \sin(nx)$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) (\forall n \in \mathbb{N}) \quad S_n(x) = u_0(x) + u_1(x) + \dots + u_n(x).$$

3.1. En utilisant le résultat de la question (1.1), démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \quad \frac{\sin\left[\left(2n+1\right)\left(\frac{t-x}{2}\right)\right]}{2\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)} dt.$$

3.2. x étant un réel donné et n un entier naturel, quelle est la valeur de :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\sin \left[(2 n + 1) \left(\frac{t - x}{2} \right) \right]}{2 \sin \left(\frac{t - x}{2} \right)} dt?$$

3.3. En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(t) \cdot \sin\left[(2n+1)\left(\frac{t-x}{2}\right)\right] dt$$

h étant la fonction définie dans la question (1.3).

En utilisant le résultat de la question (1.2), démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = f(x).$$

PARTIE 4

On suppose toujours que f est définie sur \mathbb{R} , de classe \mathbb{C}^2 et 2π -périodique.

- 4.1. a. En effectuant des intégrations par parties, calculer $a_n(f)$ et $b_n(f)$ en fonction de $a_n(f'')$ et $b_n(f'')$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.
 - b. En déduire qu'il existe un réel positif K tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |a_n(f)| \leq \frac{K}{n^2} \quad \text{et} \quad |b_n(f)| \leq \frac{K}{n^2}.$$

c. Soit g une fonction définie et continue sur $[-\pi, \pi]$. En utilisant le résultat de la question (3.3), démontrer que :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \ g(x) \ dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} u_n(x) g(x) \ dx.$$

4.2. Démontrer, en utilisant le résultat de la question (4.1.c), que si f et g sont deux fonctions définies sur \mathbb{R} , de classe \mathbb{C}^2 et 2π -périodiques :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx = \frac{a_0(f) a_0(g)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n(f) \cdot a_n(g) + b_n(f) \cdot b_n(g) \right).$$

- 4.3. Soit f et g les fonctions définies sur \mathbb{R} par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x) = |\sin^3 x|$.
 - a. Calculer $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^6 x \, dx.$
 - b. En déduire que :

$$\pi^{2} = \frac{8}{5} \left[\frac{32}{9} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{576}{[(4 n^{2} - 9) (4 n^{2} - 1)]^{2}} \right].$$

Committee the second of the second second

State of the state

Démonstration du Th. de Dirichlet pour une get de chaose C?. Application:

approximation de T par une serie.

*Si
$$u \neq o[[2\pi], \mathfrak{D} + i\Upsilon = \frac{1}{2} + e^{iu} + e^{i2u} + \dots + e^{inu} = \frac{1}{2} + e^{iu} \frac{1 - e^{inu}}{1 - e^{iu}}$$

$$= \frac{1}{2} + e^{iu} \frac{e^{\frac{iu}{2}} \left(e^{\frac{iu}{2}} - e^{\frac{iu}{2}}\right)}{e^{\frac{iu}{2}} \left(e^{-\frac{iu}{2}} - e^{\frac{iu}{2}}\right)} = \frac{1}{2} + e^{iu} \frac{1 - e^{inu}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} + e^{iu} \frac{e^{\frac{iu}{2}} \left(e^{\frac{iu}{2}} - e^{\frac{iu}{2}}\right)}{e^{\frac{iu}{2}} \left(e^{-\frac{iu}{2}} - e^{\frac{iu}{2}}\right)} = \frac{1}{2} + e^{iu} \frac{1 - e^{inu}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} + e^{iu} \frac{1 - e^{iu}}{2} + e^{\frac{iu}{2}} + e^{\frac{i$$

D'où
$$\Phi = \frac{1}{2} + \frac{\sin \frac{nu}{2} \cdot (\cos (n+1)u}{2}$$

$$\sin \frac{u}{2}$$
(*)

Comme on
$$\frac{\pi u}{2}$$
 cos $\frac{(n+1)u}{2} = \frac{1}{2} \left[sin \left(\frac{nu}{2} + \frac{(n+1)u}{2} \right) + sin \left(-\frac{u}{2} \right) \right] = \frac{1}{2} sin \frac{(2n+1)u}{2} + \frac$

I I willing women fix all forty II are a minimum

persite as a replacement

on obtient en remplasant dans (*):

$$\overline{\Psi} = \frac{\sin(2n+1)u}{2}$$
 comme prévu.

the court of the property of the contract of t

[1.2]
$$\int_{a}^{b} g(t) \sin \lambda t dt = \left[g(t) - \frac{\cos \lambda t}{\lambda}\right]_{a}^{b} + \int_{a}^{b} g'(t) \frac{\cos \lambda t}{\lambda} dt$$

$$= \frac{g(a)\cos \lambda a - g(b)\cos \lambda b}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \int_{a}^{b} g'(t) \cos \lambda t dt$$

heor Coon IR 1 (n+21721) comme quotient de fet co le dénomination ne s'annulant pas.

tertion of a grant in the

or the contract of

* Continuité en n+ket (kEZ)

Posons u = t - (x+R2x).

$$\lim_{k \to n + k \ge \pi} h(u + x + k \ge \pi) = \lim_{u \to 0} \frac{\beta(u + n + k \ge \pi) - \beta(n)}{2 \sin \frac{u + k \ge \pi}{2}}$$

$$= \lim_{u \to 0} \frac{\beta(u + n) - \beta(n)}{2 \sin \left(\frac{u}{2} + k \pi\right)} = \lim_{u \to 0} \frac{\beta(u + n) - \beta(n)}{2(-1)^k \sin \frac{u}{2}}$$

$$= \lim_{u \to 0} \frac{\beta(u + n) - \beta(n)}{2 \sin \frac{u}{2}} = \lim_{u \to 0} \frac{\beta(u + n) - \beta(n)}{2(-1)^k \sin \frac{u}{2}}$$

$$= \lim_{u \to 0} \frac{\beta(u + n) - \beta(n)}{2 \sin \frac{u}{2}} = (-1)^k \beta'(n) = h(n + k \ge \pi)$$

Done h sera continue our IR en entier

* hear continuement dérivable our $R \cdot (n+2\pi Z)$, et continue our tout R Elle sera continuement dérivable our R si l'on montre que h'(t) tend vers une limite finiel quand t tend vers $n+k2\pi$ (pour tout $k\in Z$). Dans ce cas, on aura: $h'(n+k2\pi)=l_R$. Gra:

$$R'(t) = \frac{\beta'(t) \cdot 2 \sin \frac{t-x}{2} - (\beta(t) - \beta(x)) \cdot 2 \cos(\frac{t-x}{2}) \cdot \frac{1}{2}}{4 \sin^2 \frac{t-x}{2}}$$

Sut - > x+kett , Posons u=t-(x+ket).

$$h'(k) = \frac{2\beta'(u+n)\sin\left(\frac{u}{2}+k\pi\right) - (\beta(u+n)-\beta(n))\cos\left(\frac{u}{2}+k\pi\right)}{4\sin^2\left(\frac{u}{2}+k\pi\right)}$$

$$= \frac{(-1)^k}{4} \frac{2\beta'(u+m)\sin\frac{u}{2} - (\beta(u+n) - \beta(n))\cos\frac{u}{2}}{\sin^2\frac{u}{2}}$$

La formule de Taylor - young appliquée à f, de classe C'sun R, donne; $\begin{cases} \beta(u+x) - \beta(x) = \beta'(x)u + \frac{\beta''(x)}{2}u^2 + O(u^2) \\ \beta'(u+x) = \beta'(x) + \beta''(x)u + O(u) \end{cases}$

et en remplasant:

 $h'(t) = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}}}{4} \frac{\left(2\beta'(n) + 2\beta''(n)u + o(u)\right)\left(\frac{u}{2} + o(u^2)\right) - \left(\beta'(n)u + \beta''(n)u^2 + o(u^2)\right)\left(1 - \frac{u^2}{8}\right)}{4}$

 $= \frac{(-1)^{k}}{4} \cdot \frac{\beta'(n)u + \beta''(n)u^{2} + \frac{u}{2}o(u) + o(u^{2}) - \left[\beta'(n)u + \frac{\beta''(n)}{2}u^{2} + o(u^{2})\right]}{4}$ sin 2 u particul to the first

"The publication is not the factors !

= (-1) k 8 (6) u2 + 0 (u2)

Comme $\sin^2 \frac{u}{c} \sim \frac{u^2}{4}$, $\lim_{n\to\infty} h'(t) = (-1)^k \frac{b''(n)}{2}$

Ccf: Rest de clarse C^4 et $h'(n+k2\pi) = (-1)^k \frac{\beta''(n)}{2}$

[1.4.a] La condition:

Ynein Suply (n) 1 = 11/1 o 5 an

alliée à la convergence de Dan, montre que la serie de fonctions $\sum v_n(n)$ converge uniformement vero S(n).

La limite uniforme d'une suite de fcts continues est continue, donc S(2) sera continue sur tout I:

(I copy Tome non to show by place the week which man by my 34)

[1.4.b] Evident. Le premier membre de l'inégalité proposée est majoré par :
$$\left|\sum_{p=n+1}^{\infty}\int_{a}^{b}|v_{p}(n)|\,dx\right|\leqslant\sum_{p}\int_{a}^{b}|v_{p}(n)|\,dx\in\sum_{p=n+1}^{\infty}\int_{a}^{b}|v_{p}(n)|\,dx\in\sum_{p=n+1}^{\infty}\int_{a}^{b}|v_{p}(n)|\,dx\in\sum_{p=n+1}^{\infty}\int_{a}^{b}|v_{p}(n)|\,dx\in\sum_{p=n+1}^{\infty}\int_{a}^{b}|v_{p}(n)|\,dx$$

1.4.c Si n-2+00, Dap rend vers 0 donc le 1 membre de l'inégalité du 1.4.b tend vers 0. On obtient l'éjalité du 1.4.c.

NB: On utilise ici la convergence normale de la suite de lots $\sum v_n(n)$. Enfait, un Th. classique stipule que si $\sum v_n(x)$ converge uniformément sur [a,b] et si chaque $v_n(n)$ est intégrable sur [a,b], alors on peut permuter \int et $\sum (at \sum v_n(n))$ est intégrable sur [a,b], ic:

$$\int_{a}^{b} \sum_{n=0}^{\infty} v_{n}(n) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{a}^{b} v_{n}(n)$$

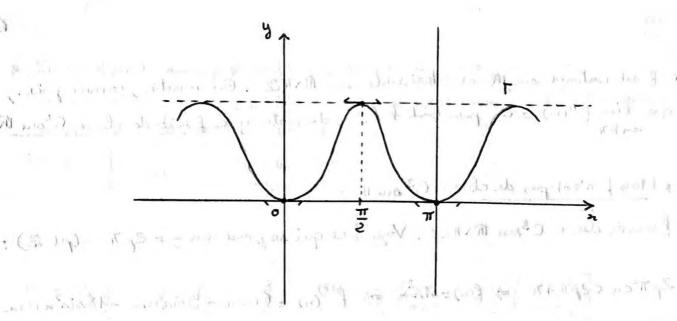
[2.1] perspaire et périodique de période 2T . Elle out continue et Cos sur R : RT . Novom Γ sa combe représentative . g(T-n)=g(T+n) montre que n=T est axe de synétrie de Γ .

On étudièra donc P sur [0,7], puis or complètera par symétrie /2 la droite d'équation n=1, puis par symétrie /2 0y.

β(n) = sin'n sur [0, π] ⇒ β'(n) = 3 sin²n cesn

l'(n) s'annule mi n E {0, \frac{\pi}{2}, \pi}, d'où les variation de \cappe:

(NB: on peut aux déduise les variations de f de celles de sinn ou [5,4)!)



Pbd'inflexion: $B''(n) = 3\sin n(2-3\sin^2 n)$ s'annule en changeant de signe on J° , Π [soi sin $n = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Comme Arcsin $\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0,3\pi$, an obtient las 2 pts d'inflexion $n = 0,3\pi$ et $n = 0,7\pi$.

* fear coo en tout pt n tel que sin3n ne change pas de signe en n, ie su IRITZ. Best continue su IR. On montrera que feat Ctom IR si l'an réussit à presurer que lim f/n) existe pour tout & EZ:

1) Sikestpain: k=ep et:

 $\begin{cases} 2p\pi < n < 2p\pi + \pi \implies \beta(n) = \sin^3 n \implies \beta'(n) = 3\sin^2 n \cos n \\ 2p\pi - \pi < n < 2p\pi \implies \beta(n) = -\sin^3 n \implies \beta'(n) = -3\sin^3 n \cos n \end{cases}$

and the tripped of the tripped of

Expertation again

Mais de boutes fazon :

 $\lim_{N\to 2\rho T_{+}} \beta'(n) = 0 = \lim_{N\to 2\rho T_{-}} \beta'(n)$

de sorte que la limite lin b(n) existe et ont rulle pour tout p EZ.

2) Le cas où Rest impair se traite de manière i dentique.

Cef: Best de classe C1 sui R.

* l'est continue ou IR et dérivable ou RITZ. En montre, comme prèc., que lim g"(n) =0 pour tout & EZ, de sorte que fooit de classe C'ou R.

* Mais & n'est pas de classe C3 om IR:

Boera de clame C3 ou RITZ. Voyono ce qui se passe en n = 2p T

 $Z_p\pi C_n (Z_p\pi + \pi \Rightarrow \beta(n) = \sin^3 n \Rightarrow \beta^{(3)}(n) = 6 cen n - 9 sin^2 cen n - 18 sin^2 n cen n$ $\{2\rho\pi_{s}(n) < 2\rho\pi \implies g(n) = -\sin^{2}x \implies g^{(3)}(n) = -6\omega n + 9\sin^{2}x\omega n + 18\sin^{2}n\omega n$

desorte que lim $\beta^{(3)}(n) = 6$ soit différente de lim $\beta^{(3)}(n) = -6$.

$$\boxed{2.2} \quad \sin^3 x = \frac{3 \sin x - \sin 3x}{4}$$

a) the point sinnt estimpaire donc b=0.

b) et c):

an = 2 sin't contal = 2 JA 3 sint - sin3t cosnt dr = 1 3 sint cont - sin3t cont dh

 $= \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^{\pi} \frac{3}{2} \sin(n+1)t - \frac{3}{2} \sin(n-1)t - \frac{1}{2} \sin(n+3)t + \frac{1}{2} \sin(n-3)t$

 $a_{n} = \frac{1}{2\pi} \left[\left[\frac{3}{2} \cdot \frac{-\cos(n+1)t}{n+1} \right]_{0}^{T} + \frac{3}{2} \left[\frac{\cos(n-1)t}{n-1} \right]_{0}^{T} + \frac{1}{2} \left[\frac{\cos(n+3)t}{n+3} \right]_{0}^{T} - \frac{1}{2} \left[\frac{\cos(n-3)t}{n-3} \right]_{0}^{T} \right]$

dès que nx1 et n x3

* Si n=2p+1 avec p \$10,1), on home app+1=0.

Si n = 1003, on remplace dans l'une des expressions précédentes "avant intégration pour obtenir encore o.

* Sin=2p, (*) donne;

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{3}{2} \left(\frac{-2}{n+1} \right) + \frac{3}{2} \left(\frac{-2}{n-1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{-2}{n+3} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{-2}{n-3} \right) \right]$$

$$a_n = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{8}{(n^2 - 3)(n^2 - 1)}$$

Gn netion du a donc:
$$a_{2p} = \frac{24}{\pi (4p^2-9)(4p^2-1)}$$

$$S_{n}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \beta(t) dt + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \beta(t) \cosh t dt \cdot \cosh pt dt \cdot \cosh pt dt \cdot \sinh pt dt \cdot \cosh pt dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\beta(t)\left(\frac{1}{2}+\sum_{p=1}^{n}cosp(t-n)\right)dt$$

$$S_n(n) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \frac{\sin(t-n)}{2} dt$$
, d'après 1.1

(comme an 1.1) oi t-n
$$\neq 0$$
 [277), et $\overline{\pm}(t) = n + \frac{1}{2}$ oi $n - t = 0$ [277). Cette

for \$\mathbb{F}\$, ainsi définie, sor continue can:

$$\frac{\sin(2n+1)u}{2\sin u} = \frac{\sin((2n+1)(v+k\pi))}{2\sin(v+k\pi)}$$

$$= \frac{\sin((2n+1)v+k\pi)}{2\sin(v+k\pi)} = \frac{(-1)^k \sin(2n+1)v}{(-1)^k \cdot 2\sin v} \sim \frac{(2n+1)v}{2v} = \frac{2n+1}{2}$$

$$= \frac{\sin((2n+1)u+k\pi)}{2\sin(v+k\pi)} = \frac{(-1)^k \cdot 2\sin v}{2v} \sim \frac{(2n+1)v}{2v} = \frac{2n+1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

Doit lim $\frac{\sin(2n+1)u}{2\sin u} = n + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x+k2\pi)$.

L'intégrale du 2 membre de 3.1 est donc bien définie, car le intégrand ast une fot continue sur [-17, Ti] soul une none fini de pts et se prolongeans, en chacem de as paints, en une get continue our tout [-A,A): à oavai \$.

[3.2] Ena, \$(t) dénognant la fet du 1.1:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left[(2n+1)\frac{t-x}{2}\right]}{2\sin\frac{t-x}{2}} dt = \frac{g(x)}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} + \sum_{\rho=1}^{n} \cos\rho(t-n) dt$$

$$= \frac{g(n)}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} + \sum_{\rho=1}^{n} \cos\rho(t-n) dt$$

[3.3] On en déduit l'égalité proposée en soustrayant les éjalités 3.1 et 3.2

Gna: $\int_{-\pi}^{\pi} h(t) \cdot \sin \left[(2n+1) \frac{t-x}{2} \right] dt = \int_{-\pi-x}^{\pi-x} 2h(2u+x) \sin (2n+1)u du$

et il suffit d'appliquer 1.3 à cette dernière intégrale pour constater que salimite est o quand n rendres + a.

D'où $\forall n \in \mathbb{R}$ lim $S_n(n) - \beta(n) = 0$, ie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(n) = \beta(n)$

pur but xER

[4.1.a] On home
$$\begin{cases} a_n(\beta) = -\frac{1}{n^2} a_n(\beta'') \\ b_n(\beta) = -\frac{1}{n^2} b_n(\beta'') \end{cases}$$
 point out $n \in \mathbb{N}^*$

4.1.6

où M = Sup | β"(t) | existe puisque β"est continue sur le compact [-π,π]. t ∈ [-π,π]

Par ouite lan (B) 1 = lan (B") 1 (2M d'où l'inégalité demandée n² n² la la mandée avec K=2M. On recommencerait de la m fayon avec | bn(B)).

[4.1.c]

Sun(n) converge normalement vers $\beta(n)$. In effet:

- · [un(n) converge simplement veus f(n) d'après 3.3
- $\forall n \mid u_n(n) \mid \leq \mid a_n(\beta) \mid + \mid b_n(\beta) \mid \leq \frac{2K}{n!}$ montre que $\sum u_n$ converge normalement, donc uniformément.

Grapoura ains intervertir det 5 comme en 1.4.c:

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(n)g(n) dn = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n \geq 0} u_n(n) g(n) dx = \sum_{n \geq 0}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} u_n(n)g(n) dx.$$

NB: En fait on itilise la cv uniforme de $\sum u_n(n)g(n)$ ves g(n).g(n) qui est évidente, can g continue assure l'existence d'un maximum M de g(n) ou $[-\pi,\pi]$, d'où: Sup $|u_n(n)g(n)| \leq \frac{2K}{n^2}$. M

$$\int_{-\pi}^{\pi} \beta \cdot g = \sum_{n \geq 0} \int_{-\pi}^{\pi} u_{n} \cdot g = \frac{\alpha_0(\beta)}{2} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx + \sum_{n \geq 0} \alpha_n(\beta) \int_{-\pi}^{\pi} cosnic. g(n) dn + b_n(\beta) \int_{-\pi}^{\pi} dx$$

=
$$\frac{\pi a_0(\beta)a_0(g)}{2} + \sum_{n \geq 0} a_n(\beta) . \pi a_n(g) + b_n(\beta) . \pi b_n(g)$$

Soit:

$$\frac{1}{\pi} \int_{\beta(n)g(n)dx}^{\pi} = \frac{8(\beta)a(g)}{2} + \sum_{n \geq 0} a_n(\beta)a_n(g) + b_n(\beta)b_n(g)$$

(NB: C'errla relation de Parseval si B=g)

Par linearisation:

$$d'o \bar{u}$$
 $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^6 n \, dn = \frac{1}{32} \int_{-\pi}^{\pi} 10 \, dn = \frac{20\pi}{32} = \frac{5\pi}{8}$

Sei
$$= \int_{\pi}^{\pi} \beta^{2}(n) dx = \frac{5}{8}$$

La formule 4.2 donne:

$$\frac{5}{8} = \frac{a_0(\beta)^2}{2} + \sum_{n \ge 1} (a_n(\beta))^2 + (b_n(\beta))^2$$

et compte temm du 2.3:

$$\begin{cases} a_{o}(\beta) = \frac{24}{9\pi} = \frac{8}{3\pi} \\ a_{2n+1} = 0 = b_{n} \quad \forall n \\ a_{2n} = \frac{24}{\pi (4n^{2}-9)(4n^{2}-1)} \end{cases}$$

d'où :

$$\frac{5}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{64}{9\pi^2} + \sum_{n \ge 1} \frac{576}{\pi^2 \left[(4n^2 - 9)(4n^2 - 1) \right]^2}$$

$$\pi^{2} = \frac{8}{5} \left[\frac{32}{9} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{576}{[(4n^{2}-9)(4n^{2}-1)]^{2}} \right]$$